

Aspekte der Computertomographie

- Arbeitsblätter für den Unterricht -
Sieglinde FÜRST und Thomas MÜLLER
BG/BRG-Krems (3500 Krems, Piaristengasse 2)

Ziel: *Andere Sichtweise für Lösungsmöglichkeiten von Gleichungssystemen, rechnerische Umsetzung einer graphischen Methode zu einem rechnerischen Algorithmus, Einblicke in die Anwendbarkeit der Mathematik in der Medizin, Querverbindungen zur Physik werden geknüpft*

Was ist Computertomographie?

Computertomographie (CT) ist ein Darstellungsverfahren, welches in der Medizin seit den Siebzigerjahren angewendet wird. Dabei entsteht das Bild nicht wie bei der konventionellen Röntgendiagnostik durch Belichtung eines Films, sondern durch Messung der von Körperteilen durchgelassenen Strahlung. Aus diesen Meßdaten werden dann die Grauwerte des (gerasterten) „Bildes“ berechnet. Es handelt sich um ein Schichtbildverfahren. Das bedeutet, daß eine Körperschicht (z.B. Querschnitt durch den Kopf) durchstrahlt wird und nicht wie bei der konventionellen Röntgenaufnahme Vielzahl von hintereinander angeordneten Körperteilen durchleuchtet wird, die dann gleichzeitig am Bild erscheinen. Aus den Meßergebnissen wird das Bild bei der CT digital rekonstruiert und auf einem Bildschirm dargestellt. Die Strahlenabsorptions-Unterschiede zwischen den verschiedenen dichten Körpergewebeteilen können (rechnerisch im Computer) verstärkt und variiert werden, sodaß man aus einer Aufnahme etwa ein Computerbild für die Weichteile und gleichzeitig durch Veränderung entsprechender Faktoren ein Bild für die Knochenschicht erhalten kann. (Aus dem ersten und zweiten Arbeitsblatt geht das Prinzip der Aufnahme hervor!)

Zeitablauf:

0. Dieser Lehrgang wurde in dieser Form bei zwei Wahlpflichtfachgruppen (7., 8. Kl.) durchgeführt. Die ersten beiden Arbeitsblätter wurden auch im Informatikunterricht (5. Kl.) eingesetzt, um die Anwendbarkeit der Informatik in der Medizin zu demonstrieren. Bei den anderen Blättern wird ein Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen expliziert und praktisch durchgerechnet.

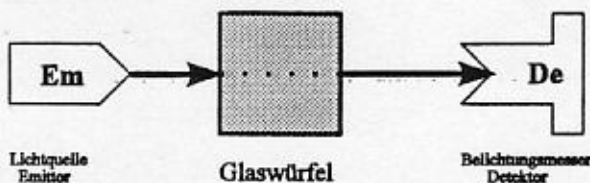
1. Grundlegendes Bekanntmachen mit der CT, Bearbeiten des 1. Arbeitsblattes
Lit: Vgl. etwa HEJTMANEK 1980, jedes neue Lexikon
Zeitbedarf: Ca. 1 Unterrichtsstunde
2. Lehrausgang in ein Krankenhaus oder zu einem Röntgenfacharzt, der CT betreibt.
Zeitbedarf: Ca. 1, 5 bis 2 Unterrichtsstunden
3. Bearbeitung der restlichen Arbeitsblätter
Zeitbedarf: Mindestens je nach Vertiefung 2 Unterrichtsstunden

Beilagen:

Kopiervorlagen [„Computertomographie (math. Basis)“, „Computertomographie (Gleichungssystem, Ausblick)“, „Numerische Auflösung von linearen Gleichungssystemen in der CT“ (3 Blätter), Lösungsvorschläge zu allen Blättern finden sich im Anschluß!]

Computertomographie (math.Basis)

Gedankenexperiment: Ein Lichtstrahl wird durch einen gefärbten Glaswürfel geschickt.



Je der Glaswürfel, desto weniger Licht wird beim Belichtungsmesser gemessen.

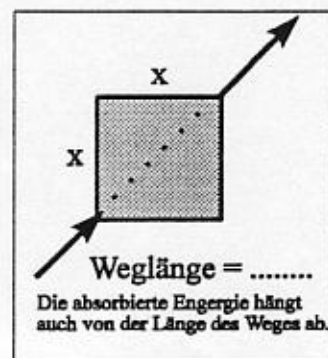
Je der Weg des Strahls durch den Glaswürfel, desto weniger Licht wird beim Belichtungsmesser gemessen.

Von der von ausgehenden Energie E wird ein Teil für das Durchdringen des Glaswürfels, sie wird vom Glaswürfel absorbiert.

Wovon hängt die verbrauchte Energie X ab ?

Die in De empfangene Energie D ist also gleich $E - X$

Die absorbierte Energie ist deshalb gleich: $X = \dots\dots\dots$



Nun denken wir uns vier Glaswürfel . . .

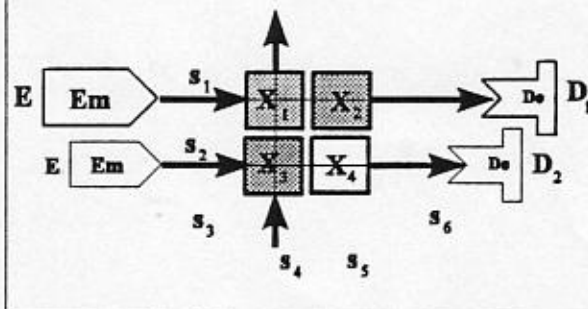
Läßt sich aus den in De empfangenen Energiewerten ermitteln, wieviel Energie jeder einzelne Glaswürfel absorbiert?

Die Absorption des 1. Strahls kann beschrieben werden durch:

$$x_1 + x_2 = E - D_1 = \text{Wert } w_1$$

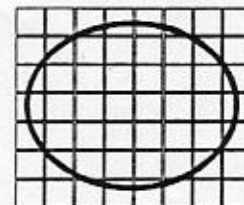
Wie lauten die Gleichungen für anderen 5 Strahlrichtungen?

Zeichne noch andere mögliche Durchstrahlungsrichtungen ein!



Wieviel Gleichungen sind zur Berechnung der vier Unbekannten notwendig?

Jetzt stellen wir uns einen Bereich von 100×100 bzw. 1024×1024 Würfeln vor. Wieviele Unbekannte gibt es dann, wieviele Gleichungen müssen gelöst werden?



Gleichungssystem wird gelöst (Computer), die Dichten der Zellen am Bildschirm sichtbar. Man erhält Querschnittsgraphiken - Schichten - von Körper(teilen).

1917: Mathematische Grundlage zur Lösung der riesigen Gleichungssysteme: J. RADON, Wien
 1972: Erste klinische Anwendung: HOUNDSFIELD

Computertomographie (Gleichungssystem, Ausblick)

Ein konkretes Zahlenbeispiel:

$$x_1 + x_2 = E - D_1 = \text{Wert } w_1$$

Ergänze die fehlenden Indizes und löse:

$$x_1 + x_2 = 7$$

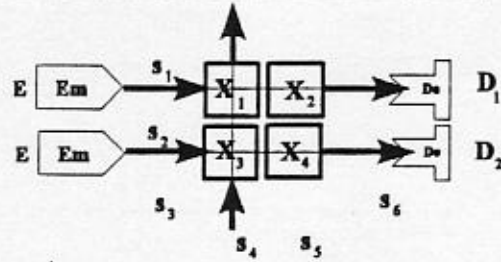
$$x_3 + x_4 = 6,3$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}x = 6,02$$

$$x + x = 7,3$$

$$x + x = 6$$

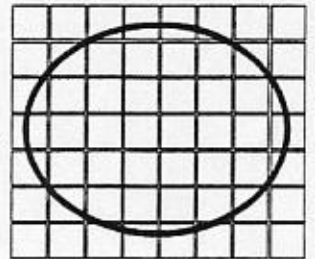
$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}x = 12,6$$



Färbe die Quadrate entsprechend den berechneten Dichtewerten. (Einheiten willkürlich)

Wieviel Gleichungen sind notwendig, um im nebenstehenden Bild (z.B. Schnitt durch Kopf) die Pixel graphisch darzustellen?

Die herkömmlichen Rechenverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen reichen nicht aus, um in kurzer Zeit die Lösungen zu ermitteln und dann Pixel am Bildschirm färbig oder in Graustufen entsprechend ihrer Dichte darzustellen!

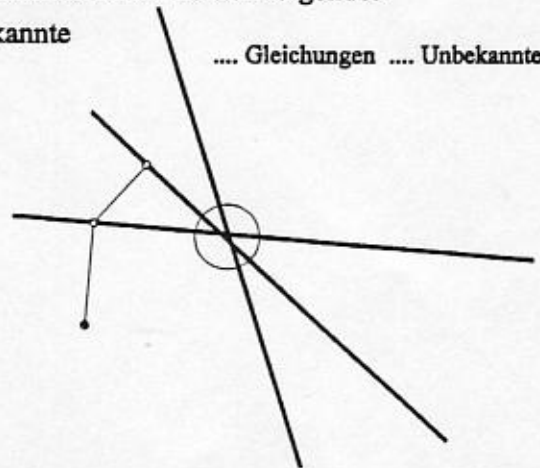
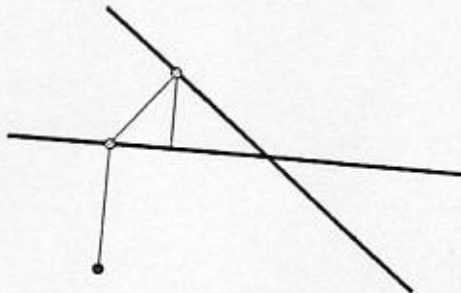


Andere Rechenverfahren:

Eine bei den ersten Generationen von Tomographen verwendete Methode war folgende:

Gegeben: Gleichungssystem Gleichungen Unbekannte

.... Gleichungen Unbekannte



Rechnet man diese Konstruktion nach, dann erhält man eine Iteration von Näherungswerten zum Schnittpunkt!

Diese Methode funktioniert auch, wenn infolge von Meßungenauigkeiten keine eindeutige Lösung vorliegt z.B.: Fehlerdreieck.

"Multiplikative algebraische Rekonstruktionstechnik", kurz "MART" (Methode von KACHMARZ)

Auch diese Methode hat sich später bei hochauflösenden Bildern als zu langsam erwiesen.

Heute verwendet man unabhängig vom Tomographieverfahren - Röntgen, Kernspin, ... zur Berechnung die inversen RADON-Transformationsformeln.

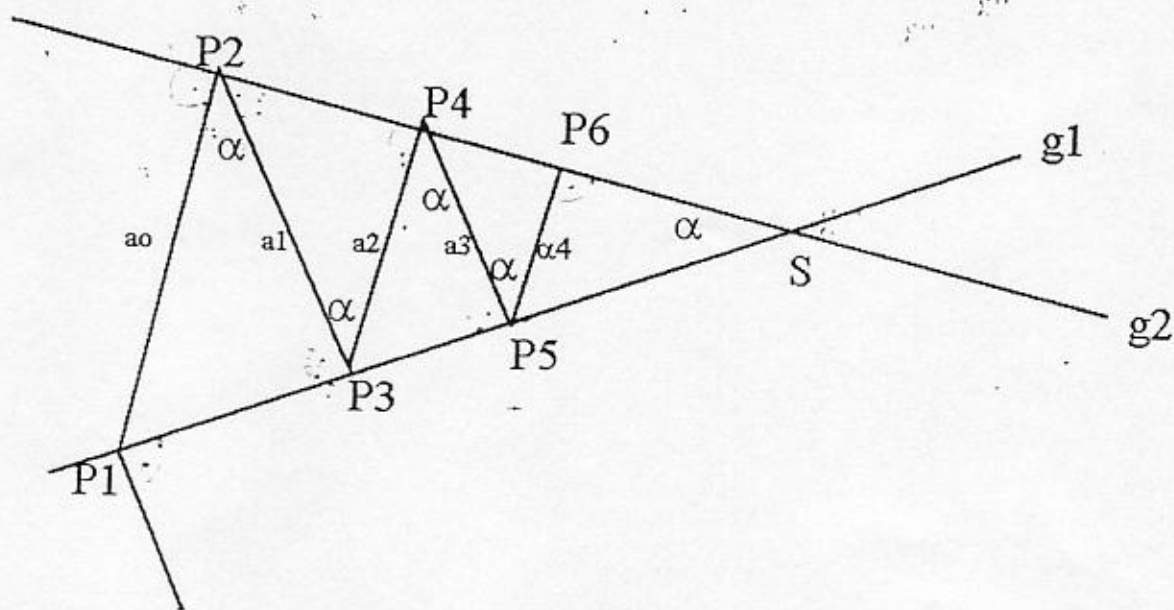
Josef RADON, (1887 - 1956, Wien)

1917 Mathematische Grundlage zur Lösung der riesigen Gleichungssysteme

Lit: HEJTMANEK: Numerische Auflösung von lin. Glssystemen i.d. CT. ; ÖMG-Heft 5, Juli 1980
Biographie von J. RADON in ÖMG-Nachrichten Heft 153 vom April 1990

Zur Konvergenz des Algorithmus

(Anwendung : Geometrische Folgen; Lehrplan 6. Klasse)



$$\cos \alpha = \frac{a_1}{a_0} \Rightarrow a_1 = a_0 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cos \alpha = a_0 \cos^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cos \alpha = a_0 \cos^3 \alpha$$

.....

$$\cos \alpha = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cos \alpha = a_0 \cos^n \alpha$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ bilden die Glieder einer geometrischen Folge mit

$0 < \cos \alpha < 1$, weil $\alpha \in]0; 90[$, konvergiert die Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

\Rightarrow Die Folge nähert sich dem Schnittpunkt S

Numerische Auflösung von linearen Gleichungssystemen in der Computertomographie

Das Gleichungssystem von unserem konkreten Zahlenbeispiel

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 & & = 7 \\
 & x_3 + x_4 & = 6,3 \\
 \sqrt{2}x_1 & & + \sqrt{2}x_4 = 6,02 \\
 & x_2 & + x_4 = 7,3 \\
 x_1 & + x_3 & = 6 \\
 \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 & & = 12,6
 \end{array}$$

kann als Matrixgleichung angeschrieben werden : $A \cdot X = P$

Gib die entsprechenden Matrizen an:

$$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Zur Lösung eines derartigen Gleichungssystems verwendet man einen Algorithmus, den wir an Hand eines ganz einfachen Beispiels erarbeiten wollen.

Annahme : 2 Gleichungen in 2 Variablen

$$\begin{array}{l}
 a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\
 b_1x_1 + b_2x_2 = c_2
 \end{array}$$

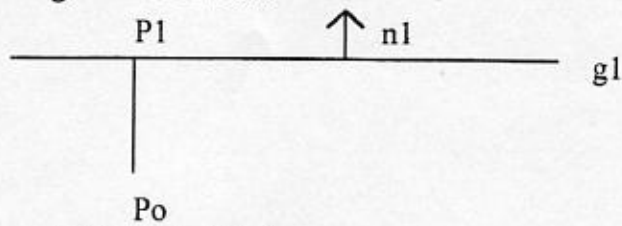
Die Zeilenvektoren der Matrix können dann geometrisch als Normalvektoren von Geraden im zweidimensionalen Raum (= Ebene) interpretiert werden. Die Lösung des Gleichungssystems entspricht dem Schnittpunkt dieser Geraden.

Der Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems sieht einen beliebigen Punkt P_0 vor, der abwechselnd auf die beiden gegebenen Geraden normal projiziert wird. Dabei entsteht eine unendliche Folge von Punkten P_0, P_1, P_2, \dots , die - wie man zeigen und aus der Zeichnung ersehen kann - gegen den Schnittpunkt (= Lösung) konvergiert.

Das mathematische Verfahren läßt sich auch dann anwenden, wenn eine große $n \times r$ - Matrix gegeben ist, d.h. n Variable auftreten. Man wählt dann als "Ausgangspunkt" einen n - dimensionalen Vektor und wendet eine "Normalprojektion" an. Die Folge von Vektoren konvergiert nach dem Lösungsvektor.

Kurz: Das Verfahren im zwei-dimensionalen Vektorraum läßt sich - ohne geometrische Interpretationsmöglichkeit - auf den n -dimensionalen Vektorraum übertragen.

Allgemeiner Ansatz:



g_1 in Normalvektorform :

$$\vec{n}_1 \cdot X = c_1$$

1. Bedingung: $P_0 P_1 = a \cdot \vec{n}_1 \quad a \in \mathbb{R} \quad (1)$

daraus folgt für P_1 :

2. Bedingung: $P_1 \in g_1$

(2)

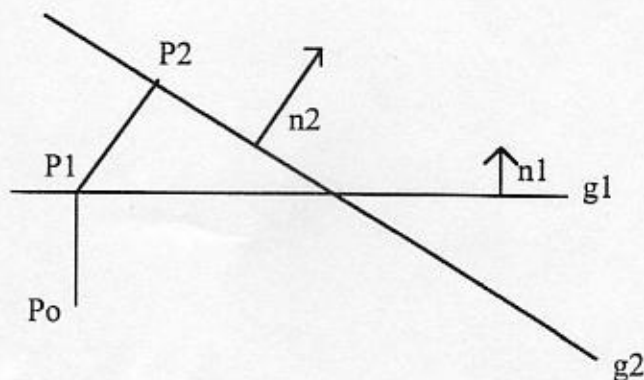
Um die Variable a zu berechnen, wird (1) in (2) eingesetzt:

$$a =$$

a in (1) einsetzen ergibt eine Gleichung zur Berechnung von P_1 :

$$P_1 = P_0 +$$

Das Verfahren wird fortgesetzt:



$$\bar{n}_2 \cdot X = c_2$$

.Bedingung: $P_1 P_2 = b \cdot \bar{n}_2 \quad b \in \mathbb{R} \quad (1)$

daraus folgt für P_2 : $P_2 = P_1 + b \cdot \bar{n}_2$

2. Bedingung: $P_2 \in g_2$

$$\bar{n}_2 \cdot X = c_2$$

$$\bar{n}_2 \cdot P_2 = c_2 \quad (2)$$

Um die Variable a zu berechnen, wird (1) in (2) eingesetzt:

$$\bar{n}_1 (P_0 + a \cdot \bar{n}_1) = c_1$$

$$\bar{n}_2 P_1 + b \cdot \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2 = c_2$$

$$b = \frac{c_2 - \bar{n}_2 P_1}{\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2}$$

a in (1) einsetzen ergibt eine Gleichung zur Berechnung von P_2 :

$$P_2 = P_1 + \frac{c_2 - \bar{n}_2 P_1}{\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2} \cdot \bar{n}_2$$

Dieses Iterationsverfahren lässt sich beliebig lang fortsetzen.

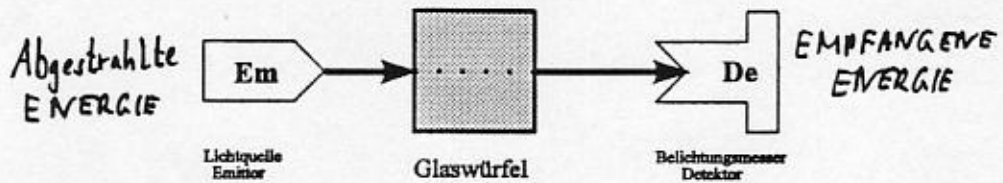
Beispiel: $g_1: 2x_1 - x_2 = 2$

$g_2: -x_1 + x_2 = 9 \quad P_0 = (-3/0)$

Rechne bis zum Punkt P_4 und überprüfe mittels einer Zeichnung die errechneten Werte!

Vorschläge zum Ausfüllen der Blätter:

Gedankenexperiment: Ein Lichtstrahl wird durch einen gefärbten Glaswürfel geschickt.



Je DUNKLER... der Glaswürfel, desto weniger Licht wird beim Belichtungsmesser gemessen.

Je LÄNGER... der Weg des Strahls durch den Glaswürfel, desto weniger Licht wird beim Belichtungsmesser gemessen.

Von der von E_m ausgehenden Energie E wird ein Teil für das Durchdringen des Glaswürfels verbraucht, sie wird vom Glaswürfel absorbiert.
Wovon hängt die verbrauchte Energie X ab?

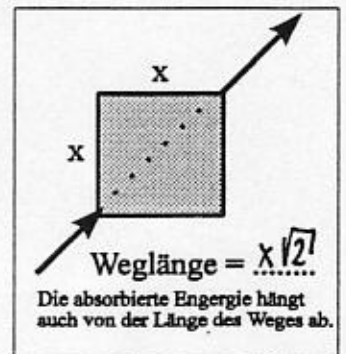
DICHTE

WEGLÄNGE

Die in D_e empfangene Energie D ist also gleich $E - X$

Die absorbierte Energie ist deshalb gleich: $X = E - D$

bei kleinen Würfeln vernachlässigbar



Nun denken wir uns vier Glaswürfel...

Läßt sich aus den in D_e empfangenen Energiewerten ermitteln, wieviel Energie jeder einzelne Glaswürfel absorbiert?

X hängt exponentiell vom Weg ab (nicht linear!!)

Die Absorption des 1. Strahls kann beschrieben werden durch:

$$x_1 + x_2 = E - D_1 = \text{Wert } w_1$$

Wie lauten die Gleichungen für anderen 5 Strahlrichtungen?

$$x_3 + x_4 = w_2$$

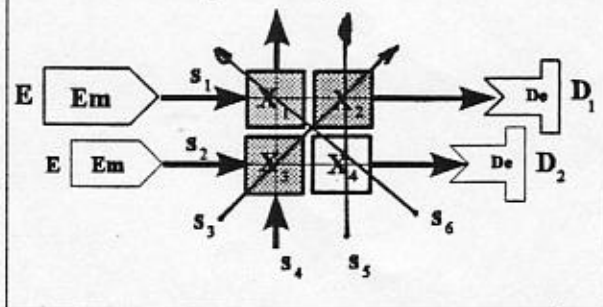
$$x_3 \sqrt{2} + x_2 \sqrt{2} = w_3$$

$$x_3 + x_1 = w_4$$

$$x_4 + x_2 = w_5$$

$$x_4 \sqrt{2} + x_1 \sqrt{2} = w_6$$

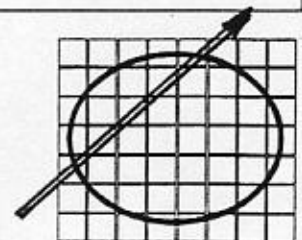
Zeichne noch andere mögliche Durchstrahlungsrichtungen ein!



Wieviel Gleichungen sind zur Berechnung der vier Unbekannten notwendig? **4**

Jetzt stellen wir uns einen Bereich von 100×100 bzw. 1024×1024 Würfeln vor. Wieviele Unbekannte gibt es dann, wieviele Gleichungen müssen gelöst werden?

10 000 bzw. > 1000 000



Gleichungssystem wird gelöst (Computer), die Dichten der Zellen am Bildschirm sichtbar. Man erhält Querschnittsgraphiken - Schichten - von Körper(teilen).

Computertomographie (Gleichungssystem, Ausblick)

Ein konkretes Zahlenbeispiel:

$$\Delta_1 \quad x_1 + x_2 = E - D_1 = \text{Wert } w_1$$

Ergänze die fehlenden Indizes und löse:

$$\Delta_1 \quad x_1 + x_2 = 7$$

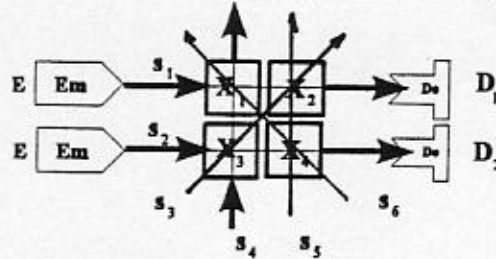
$$\Delta_2 \quad x_3 + x_4 = 6,3$$

$$\Delta_3 \quad \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_4 = 6,02$$

$$\Delta_4 \quad x_2 + x_4 = 7,3$$

$$\Delta_5 \quad x_1 + x_3 = 6$$

$$\Delta_6 \quad \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 = 12,6$$



Färbe die Quadrate entsprechend den berechneten Dichtewerten.
(Einheiten willkürlich)

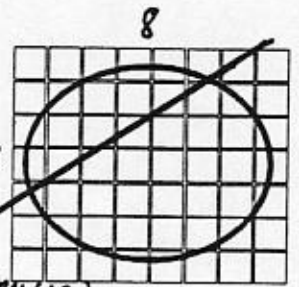
$$\Delta_1 - \Delta_4: x_1 - x_4 = -0,3$$

$$\Delta_3: x_1 + x_4 = 4,3$$

$$\rightarrow x_1 = 2 \rightarrow x_4 = 2,3 \xrightarrow{\Delta_2} x_3 = 4 \xrightarrow{\Delta_1} x_2 = 5$$

(tatsächlich gibt es bis zu 4000 Graustufen, die in gewissen "Fenstern" dargestellt werden!)

Wieviel Gleichungen sind notwendig, um im nebenstehenden Bild (z.B. Schnitt durch Kopf) die Pixel graphisch darzustellen? 56

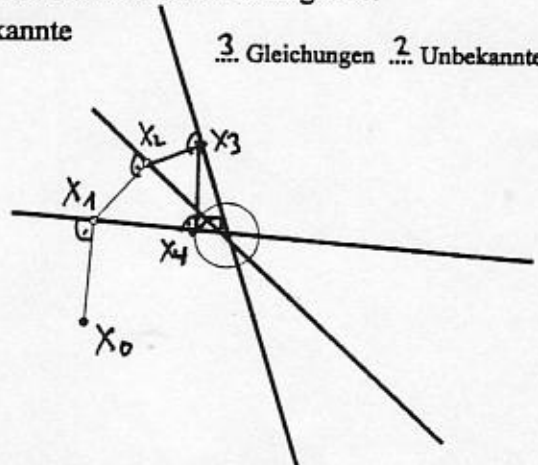
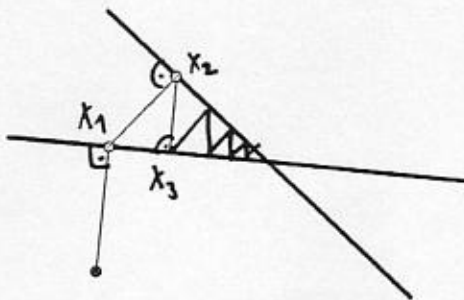


Die herkömmlichen Rechenverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen reichen nicht aus, um in kurzer Zeit die Lösungen zu ermitteln und dann Pixel am Bildschirm färbig oder in Graustufen entsprechend ihrer Dichte darzustellen.

Eine bei den ersten Generationen von Tomographen verwendete Methode war folgende:

Gegeben: Gleichungssystem ... Gleichungen ... Unbekannte

3. Gleichungen 2. Unbekannte



Rechnet man diese Konstruktion nach, dann erhält man eine Iteration von Näherungswerten zum Schnittpunkt!

Diese Methode funktioniert auch, wenn infolge von Meßgenauigkeiten keine eindeutige Lösung vorliegt z.B.: Fehlerdreieck.

"Multiplikative algebraische Rekonstruktionstechnik", kurz "MART" (Methode von KACHMARZ)

Auch diese Methode hat sich später bei hochauflösenden Bildern als zu langsam erwiesen.

Heute verwendet man unabhängig vom Tomographieverfahren - Röntgen, Kernspin, ... zur Berechnung die inversen RADON-Transformationsformeln.

Josef RADON, (1887 - 1956, Wien)

1917 Mathematische Grundlage zur Lösung der riesigen Gleichungssysteme

Lit: HEJTMANEK: Numerische Auflösung von lin. Glssystemen i.d. CT. ; ÖMG-Heft 5, Juli 1980
Biographie von J. RADON in ÖMG-Nachrichten Heft 153 vom April 1990

Numerische Auflösung von linearen Gleichungssystemen in der Computertomographie

Das Gleichungssystem von unserem konkreten Zahlenbeispiel

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & = 7 \\ & x_3 + x_4 & = 6,3 \\ \sqrt{2}x_1 & & + \sqrt{2}x_4 = 6,02 \\ & x_2 & + x_4 = 7,3 \\ x_1 & + x_3 & = 6 \\ \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 & & = 12,6 \end{array}$$

kann als Matrixgleichung angeschrieben werden : $A \cdot X = P$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6,3 \\ 6,02 \\ 7,3 \\ 6 \\ 12,6 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung eines derartigen Gleichungssystems verwendet man einen Algorithmus, den wir an Hand eines ganz einfachen Beispiels erarbeiten wollen.

Annahme : 2 Gleichungen in 2 Variablen. $a_1x_1 + a_2x_2 = c_1$
 $b_1x_1 + b_2x_2 = c_2$

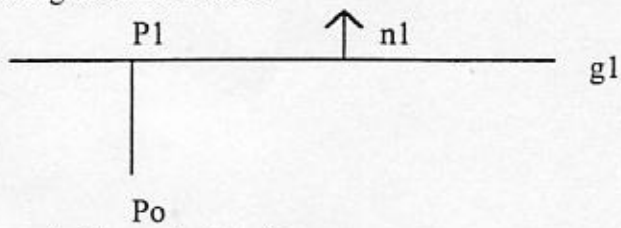
Die Zeilenvektoren der Matrix können dann geometrisch als Normalvektoren von Geraden im zweidimensionalen Raum (= Ebene) interpretiert werden. Die Lösung des Gleichungssystems entspricht dem Schnittpunkt dieser Geraden.

Der Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems sieht einen beliebigen Punkt P_0 vor, der abwechselnd auf die beiden gegebenen Geraden normal projiziert wird. Dabei entsteht eine unendliche Folge von Punkten P_0, P_1, P_2, \dots , die - wie man zeigen und aus der Zeichnung ersehen kann - gegen den Schnittpunkt (= Lösung) konvergiert.

Das mathematische Verfahren läßt sich auch dann anwenden, wenn eine große $n \times r$ - Matrix gegeben ist, d.h. n Variable auftreten. Man wählt dann als "Ausgangspunkt" einen n - dimensionalen Vektor und wendet eine "Normalprojektion" an. Die Folge von Vektoren konvergiert nach dem Lösungsvektor.

Kurz: Das Verfahren im zwei-dimensionalen Vektorraum läßt sich - ohne geometrische Interpretationsmöglichkeit - auf den n -dimensionalen Vektorraum übertragen.

Allgemeiner Ansatz:



g_1 in Normalvektorform :

$$\bar{n}_1 \cdot X = c_1$$

1. Bedingung: $P_o P_1 = a \cdot \bar{n}_1 \quad a \in \mathbb{R} \quad (1)$

daraus folgt für P_1 : $P_1 = P_o + a \cdot \bar{n}_1$

2. Bedingung: $P_1 \in g_1$

$$\bar{n}_1 \cdot X = c_1$$

$$\bar{n}_1 \cdot P_1 = c_1 \quad (2)$$

Um die Variable a zu berechnen, wird (1) in (2) eingesetzt:

$$\bar{n}_1 (P_o + a \cdot \bar{n}_1) = c_1$$

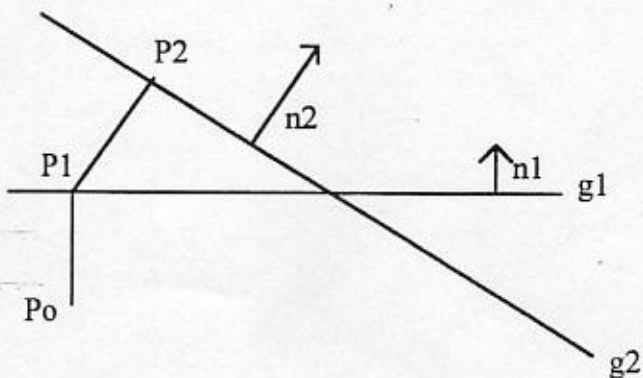
$$\bar{n}_1 P_o + a \cdot \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_1 = c_1$$

$$a = \frac{c_1 - \bar{n}_1 P_o}{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_1}$$

a in (1) einsetzen ergibt eine Gleichung zur Berechnung von P_1 :

$$P_1 = P_o + \frac{c_1 - \bar{n}_1 P_o}{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_1} \cdot \bar{n}_1$$

Das Verfahren wird fortgesetzt:



$$\bar{n}_2 \cdot X = c_2$$

.Bedingung: $P_1 P_2 = b \cdot \bar{n}_2 \quad b \in \mathbb{R} \quad (1)$

daraus folgt für P_2 : $P_2 = P_1 + b \cdot \bar{n}_2$

2. Bedingung: $P_2 \in g_2$

$$\bar{n}_2 \cdot X = c_2$$

$$\bar{n}_2 \cdot P_2 = c_2 \quad (2)$$

Um die Variable b zu berechnen, wird (1) in (2) eingesetzt:

$$\bar{n}_2 (P_1 + b \cdot \bar{n}_2) = c_2$$

$$\bar{n}_2 P_1 + b \cdot \bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2 = c_2$$

$$b = \frac{c_2 - \bar{n}_2 P_1}{\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2}$$

b in (1) einsetzen ergibt eine Gleichung zur Berechnung von P_2 :

$$P_2 = P_1 + \frac{c_2 - \bar{n}_2 P_1}{\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_2} \cdot \bar{n}_2$$

Dieses Iterationsverfahren lässt sich beliebig lang fortsetzen.

Beispiel: $g_1: 2x_1 - x_2 = 2$

$g_2: -x_1 + x_2 = 9 \quad P_0 = (-3/0)$

Rechne bis zum Punkt P_4 und überprüfe mittels einer Zeichnung die errechneten Werte!

$$\text{Lösung: } P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2 - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,6 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,6 \end{pmatrix} + \frac{9 - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,6 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,6 \end{pmatrix} + \frac{2 - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,6 \end{pmatrix}}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 1,2 \end{pmatrix} + \frac{9 - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,6 \\ 1,2 \end{pmatrix}}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 3,3 \end{pmatrix}$$